



GÖDEL, KURT FRIEDRICH (1906 - 1978)

Giovanni Binotti

I. La vita, la personalità e l'opera - II. Completezza e decidibilità delle teorie logiche - III. Gli argomenti sviluppati da Gödel nelle *Proposizioni formalmente indecidibili dei "Principia Mathematica" e di sistemi affini* - IV. Aspetti filosofici - V. Il tempo e le sue aporie - VI. La prova ontologica dell'esistenza di Dio.

I. La vita, la personalità e l'opera

Kurt Friedrich Gödel nacque il 28 aprile 1906 a Brünn, in Moravia (oggi Brno, Rep. Ceca), provincia dell'Impero Austro-ungarico a maggioranza ceca, ma con una forte minoranza di lingua tedesca, alla quale appartenevano entrambi i genitori, di condizione agiata, e morì a Princeton (New Jersey) il 14 gennaio 1978. Era il secondogenito (il fratello Rudolf, maggiore di quattro anni, gli sopravvisse, e morì nel 1981), e fu battezzato nella Chiesa luterana, seguendo la religione della madre (il padre apparteneva alla chiesa scismatica dei "vecchi cattolici"): anche se non fu mai praticante, egli si definì sempre un credente.

1. *Gli anni della formazione ed il "decennio mirabile"*. Dopo un'ottima carriera liceale, Gödel entrò nel 1924 all'Università di Vienna, rinunciando alla nazionalità ceca. Inizialmente era sua intenzione dedicarsi alla fisica ma, affascinato dalle lezioni di matematica e da quelle di storia della filosofia di H. Gomperz (figlio del più celebre Theodore), nel 1926 passò agli studi di matematica, mantenendo un vivo interesse per la filosofia: in quello stesso anno iniziava una lettura di → Kant che sarà più volte ripresa. Kurt era un giovane di salute delicata, silenzioso e molto riflessivo, che coglieva rapidamente il nucleo dei problemi, sempre pronto ad offrire con naturalezza il proprio aiuto ai compagni (cfr. Gödel et al., 1987); il suo talento era evidente e H. Hahn, uno dei matematici più brillanti della Facoltà, lo accolse nel proprio gruppo di giovani ricercatori, ne valorizzò gli interessi e lo invitò a frequentare le sedute del Circolo di Vienna (→ POSITIVISMO, II) che aveva fondato con M. Schlick (1882-1936). Questo avvenne regolarmente dal 1926 al 1928, poiché, anche se Gödel non condivideva il neopositivismo del suo maestro, il Circolo rappresentava uno dei più stimolanti crocevia della cultura europea. Vi conobbe tra gli altri, R. Carnap (1891-1970), la cui influenza contribuì ad orientarlo verso temi logici, e J. von Neumann (1903-1957), matematico e logico di origine magiara, al quale lo legò un'amicizia duratura.

Gödel conseguì il dottorato a Vienna all'inizio del 1930, con una tesi di Logica, in cui dimostrava la completezza del Calcolo dei predicati del 1° ordine (*Sulla completezza del calcolo della logica* , 1929*, in *Opere*, pp. 63-82, e *La completezza degli assiomi del calcolo funzionale logico*, 1930, in *Opere*, pp. 83-93. Nell'edizione delle opere di Gödel , i testi inediti vengono indicati con "*anno", gli altri con "anno/?": cfr. *infra* , Bibliografia), che lo fece conoscere anche all'esterno della ristretta cerchia universitaria in cui viveva e aperse il decennio più fecondo, e più drammatico, della sua vita, anche se nulla lo faceva presagire. Nella sua "tesi" aveva seguito fedelmente l'indirizzo inaugurato dal grande D. Hilbert (1862-1943), il matematico più influente all'inizio del XX secolo, dopo la prematura morte di H. Poincaré (1854-1912). Ma proprio mentre tentava di dimostrare, in tale prospettiva, la coerenza dell'analisi matematica, riconducendola a quella dell'aritmetica, Gödel ottenne gli sconcertanti teoremi di "incompletezza" e di "indecidibilità" che lo resero famoso. Il primo fu annunciato informalmente, durante un convegno a Königsberg il 7 settembre del 1930, dove era stato invitato a presentare una comunicazione ufficiale sul più atteso e quindi accettabile tema della sua tesi. La scelta dei tempi fu perfetta e provocò notevole scalpore tra i partecipanti anche se pochi, allora, ne compresero veramente la portata: neppure Carnap che, con F. Waismann (1889-1959), ne aveva avuto un'anticipazione, qualche giorno prima, in una conversazione privata. La sola eccezione fu von Neumann che stava lavorando sugli stessi problemi. La dimostrazione di incompletezza per i linguaggi formali, capaci di esprimere l'aritmetica di Peano, costituì il nucleo della *Habilitationschrift* (1932) all'Università di Vienna, che conferì a Gödel il titolo di *Privatdozent* e la *venia docendi* (1933), il diritto di tenere lezioni all'Università, senza retribuzione eccetto che per gli emolumenti che poteva raccogliere dagli studenti (cfr. *Proposizioni formalmente indecidibili dei "Principia matematica" e di sistemi affini I*, 1931, in *Opere*, pp. 113-138). La vita in queste condizioni era tutt'altro che facile e si aggravava a causa delle ripercussioni della crisi di Wall-Street che stavano raggiungendo anche l'Europa. Per cui Kurt era costretto a vivere in famiglia che, nonostante la morte improvvisa di suo padre, restava un'isola di relativa prosperità. Tanto che sua madre, pur conservando la villa di Brno, aveva potuto prendere un appartamento a Vienna per lei e

i due figli: tutti e tre uscivano spesso insieme, specialmente per frequentare il teatro che amavano molto.

I corsi di Gödel a Vienna fino al 1938 furono in tutto soltanto tre; nel frattempo non mancavano altri impegni, come la sua collaborazione con contributi di notevole interesse al Seminario matematico di uno degli allievi prediletti di Hahn, K. Menger. Questi invitava spesso studiosi stranieri di sicuro valore, come J.E.L. Brouwer (1881-1966) e giovani promettenti, come il logico polacco A. Tarski (1902-1983) con il quale, agli inizi del 1930, Gödel poté discutere i risultati della sua tesi. Ma soprattutto i reiterati inviti ad insegnare all' *Institute for Advanced Study* (*I.A.S.*) di Princeton, da poco fondato (1930), assorbito gran parte del suo tempo e delle sue energie. Gödel fu tra i primi a tenervi una serie di lezioni memorabili, seguite da conferenze a New York e a Washington che, trovando un terreno fecondo preparato dai grandi logici statunitensi come Sheffer, Lewis e Post, diedero copiosi frutti per il futuro della ricerca logica negli Stati Uniti. Tra coloro che le seguirono vi furono A. Church (1903-1995) e i due giovani logici S.C. Kleene e J.B. Rosser, i quali redassero gli appunti che, rivisti da Gödel, formarono il nucleo dell'articolo *Sulle proposizioni indecidibili dei sistemi matematici formali*, 1934 (*Opere*, pp. 252-275). Rosser migliorò anche il risultato di incompletezza di Gödel, ottenendolo sotto condizioni più generali. La "teoria delle funzioni ricorsive generali", che avrà di lì a poco, in A.M. Turing (1912-1954), il suo epigono, fu all'inizio in gran parte opera di Gödel (cfr. i citati articoli del 1931 e del 1934) che sviluppò un'idea del logico francese J. Herbrand, morto giovanissimo. Ma i numerosi e ripetuti viaggi (tra il 1933 e il 1939) gli costarono sforzi eccessivi al punto che, al ritorno, egli fu più volte ricoverato per collapsi nervosi, prime avvisaglie della depressione che diverrà una presenza costante nella sua vita. Nel 1935, interrompendo bruscamente il suo viaggio, giunse a rassegnare le dimissioni dall'incarico di Princeton, ormai troppo gravoso. Nel 1938 si sposò con Adele Nimburski, una donna più anziana di lui che conosceva da dieci anni, e dalla quale non ebbe figli. La situazione politica in Europa stava precipitando verso la Guerra Mondiale. Nella relativamente pacifica Austria l'influenza del nazionalsocialismo cresceva e le sue dirette conseguenze, le persecuzioni politiche e la discriminazione razziale, colpivano gli amici di Gödel ed il loro comune ambiente, mentre di anno in anno si facevano sempre più deboli i legami che lo trattenevano a Vienna. Morto Hahn (1934), poi Schlick, assassinato da uno squilibrato (1936), ed emigrati negli Stati Uniti Carnap, Menger, von Neumann e tanti altri, tra il 1937 ed il 1938 non restava più nessuno dei suoi amici. Tutto ciò lo spinse a mutare drasticamente i propri programmi. Tornato in Austria dall'ultimo viaggio negli Stati Uniti nel giugno 1939 per sottostare all'esame medico che lo riconoscerà idoneo al servizio militare sedentario, Gödel decise di emigrare: il suo "decennio mirabile" si concludeva pochi giorni prima del Natale del 1939, tra frenetici tentativi di ottenere i visti di espatrio e i permessi di immigrazione negli Stati Uniti, fuori della quota prevista. Ma proprio in questo clima concitato era riuscito a risolvere la prima parte del "grande problema" che lo occuperà tutta la vita, stabilendo la consistenza dell'«assioma di scelta» (e dell'Ipotesi generalizzata del continuo) con gli assiomi della «teoria degli insiemi» (cfr. Cohen, 1973, cap. 3).

2. *Il soggiorno americano e gli ultimi anni.* Ottenuti i relativi visti, nel gennaio 1940 i Gödel intrapresero il tanto sospirato viaggio che si concluse a Princeton dove la coppia giunse all'inizio di marzo. Erano partiti dalla Lituania, avevano attraversato tutta la Russia per mezzo della Transiberiana fino alla Manciuria, dove si erano imbarcati per Yokohama, in Giappone, e di qui per gli Stati Uniti. Sbarcati a San Francisco, avevano quindi raggiunto la propria meta in treno. Lo *I.A.S.* divenne il loro rifugio, ove furono subito ospitati, ma forse non del tutto accolti: le dimissioni rassegnate a suo tempo da Kurt, il suo carattere solitario, l'estrazione sociale della moglie, contribuirono a mantenerli abbastanza isolati. Furono gli anni dei primi saggi di "filosofia della matematica" (Gödel, 1944, 1946, 1947) e di alcuni brevi, inattesi, articoli di fisica teorica sugli universi in rotazione. Essi introducono per la prima volta soluzioni delle equazioni della → relatività generale con tempi locali differenti, che non si uniformano tra loro (Gödel, 1949). Questi anni sono rappresentativi del modo di lavorare e dello spirito che caratterizzerà i due decenni successivi. Si tratta di ricerche che muovono da interessi filosofici sempre più accentuati, uniti in modo assolutamente inedito a problemi scientifici di alto profilo: esplosioni di creatività su uno sfondo di lavoro oscuro e, in apparenza, inconcludente, che non farebbero presagire nulla di straordinario se non a pochi intimi, come il grande amico "americano" di Kurt, → Albert Einstein (1879-1955), compagno di lunghe passeggiate delle quali ci è stato trasmesso un ricordo commosso e divertito. Due figure estremamente contrastanti. Einstein, abbigliato in modo informale, disinvolto, estroverso, allegro, e Gödel in cappotto scuro e cappello, serio, pensoso, spesso taciturno, coinvolti in discussioni animate dalla stessa passione per la → verità, disposti ad andare fino in fondo ai problemi che affrontavano.

Fino al 1946, quando divenne un membro permanente, Gödel ebbe, a Princeton, soltanto un incarico precario su base annuale e solamente a partire dal 1953, dopo aver vinto un "Premio Einstein", condiviso con J. Schwinger, riebbe la "nomina a Professore" (cfr. J.W. Dawson, *Kurt Gödel: un'immagine più nitida*, in Shanker, 1991, pp. 11-12). E qui, dovendo partecipare alla gestione dello *I.A.S.* si dedicò al problema delle domande di ammissione sempre più numerose da parte di logici di valore, giovani e meno giovani, come quel P. Bernays che era stato collaboratore di Hilbert. Gödel prendeva molto a cuore questi problemi, dedicandovi una gran quantità di tempo, senza darsi pace quando molte di quelle domande non venivano accettate. Gli Stati Uniti, grazie ad una politica di accoglienza relativamente liberale verso scienziati e intellettuali perseguitati dai regimi totalitari, pullulavano di ospiti illustri. Egli stesso fu, in un certo senso, vittima di questa situazione: era certamente una delle glorie dello *I.A.S.*, ma, da un punto di vista accademico, la sua attività non era quantitativamente delle più soddisfacenti. La sua produzione era discontinua, una scrupolosità maniacale gli impediva spesso di pubblicare tempestivamente i risultati raggiunti, come è testimoniato dagli inediti, mentre la salute continuava a tradirlo.

La scomparsa di Einstein prima (1955) e due anni dopo di von Neumann (1957), seguita da quella di altri amici, lo segnò profondamente rendendolo ancora più solitario e schivo, occupato da interessi intellettuali che lo isolavano fatalmente in un ambiente costituito soprattutto di scienziati. Studiava le opere di → Leibniz, la fenomenologia husserliana, la teologia, coltivando una sua forma personalissima di platonismo del tutto controcorrente rispetto agli indirizzi filosofici dominanti all'epoca negli Stati Uniti, come il pensiero di Dewey (→ PRAGMATISMO, II), il neopositivismo e il neoempirismo logico (→ POSITIVISMO, II). Soltanto alcuni giovani riuscirono a rompere l'isolamento dello scienziato, divenuto una sorta di leggenda dai contorni non sempre attraenti, riuscendo a sottrarlo alla tentazione di appartarsi definitivamente. Fu così che negli ultimi anni della sua vita, pur non avendo né studenti da seguire né una vera e propria scuola, Kurt Gödel segnò ancora una generazione di logici, provenienti da varie parti del mondo, che ricevettero da lui suggerimenti, stimoli e amicizia sincera: ricordiamo i nomi di W. Boone, G. Kreisel, A. Robinson, D. Scott, C. Spector, G. Takeuti e, infine, Hao Wang, il quale fu il più assiduo e, oltre a rappresentare l'ultima delle amicizie più importanti nella vita di Gödel, fu forse l'unico in quegli anni a prenderlo anche filosoficamente sul serio ed il primo che ci abbia fornito un suo profilo intellettuale complessivo (cfr. Wang, 1981).

A partire dal 1951, Gödel aveva cominciato a ricevere molti riconoscimenti. Oltre a varie lauree *honoris causa*, di particolare valore fu la sua designazione da parte dell' *American Mathematical Society* a tenere la "Conferenza Gibbs" di quell'anno; poi il già ricordato "Premio Einstein" (1953), e quindi la sua elezione a membro di varie accademie prestigiose, come la *National Academy of Sciences* (1955), l' *American Academy of Arts and Sciences* (1957) e la *Royal Society* (1961). Infine, nel 1975, un anno prima di diventare professore emerito, gli fu conferito, da parte del presidente degli Stati Uniti Ford, il massimo riconoscimento dato da quel Paese ad uno scienziato, la *National Medal of Science*, che non poté però ricevere personalmente a causa delle sue cattive condizioni di salute. Dagli anni Sessanta la sua depressione era infatti peggiorata, soltanto l'insistenza amorevole della moglie lo spingeva a curarsi e, quando ella cadde gravemente ammalata, ne subì un gravissimo colpo. A sua volta, Kurt l'assistette devotamente, finché l'accentuarsi della depressione e la manifestazione di sintomi di paranoia sotto forma di paura di avvelenamento, lo portarono all'inedia ed alla morte. Tre anni dopo anche la moglie lo seguiva. Sono sepolti insieme nello storico *Princeton Cemetery*.

3. *Carattere dei suoi scritti.* Tutti gli scritti di Gödel di una certa estensione, anche quelli che hanno un carattere prevalentemente tecnico (logico, matematico o fisico), comprendono considerazioni di carattere generale che, in mancanza di termini migliori, potremmo chiamare "filosofiche". Esse rivelano un contesto culturale di grande ampiezza, al quale, negli anni, l'Autore si è dedicato con ricerche sempre più approfondite. Questo sfondo sul quale viene collocata l'opera più propriamente scientifica, contenuto all'inizio in introduzioni, note o commenti, passerà successivamente in primo piano. È la messa a punto di uno stile di conoscenza capace di integrare in modo nuovo e produttivo le grandi divisioni di campo, tra scienza e filosofia, senza ignorarne le specificità metodologiche o confonderne i confini. Leggere in una continuità di questo tipo l'opera di Gödel permette la messa a fuoco di concetti che concernono la sostanza stessa della filosofia, della logica e della matematica. L'impostazione epistemologica generale che se ne può desumere si inserisce con piena dignità nel panorama filosofico del XX secolo (→ EPISTEMOLOGIA, II). Come in ogni opera metodologicamente corretta, basi precise e circoscritte non restringono affatto la portata delle argomentazioni che se ne possono ricavare ma, al contrario, rendono possibile ragionare seriamente intorno ad esse, controllando passo dopo passo le eventuali estensioni successive della loro portata.

II. Completezza e decidibilità delle teorie logiche

1. *Logica e fondazione della matematica.* La riflessione sulla → logica negli anni '20, al momento in cui Gödel cominciò ad occuparsene, era strettamente legata alla crisi dei fondamenti della matematica ed alle strategie escogitate per superarla che provenivano essenzialmente da tre direzioni, la «teoria degli insiemi» (→ CANTOR, IV) e le ricerche logiche di Frege (1848-1925) e di Peano (1858-1932). La teoria degli insiemi e la logica di Frege (→ LOGICA III. 1) avevano riprodotto, attraverso il concetto ("ingenuo") di insieme, il germe delle antinomie, perciò la strada battuta da Peano - una lingua artificiale costruita come un calcolo che aveva dalla sua una tradizione che risaliva almeno a Leibniz - sembrava molto più promettente. Seguendola, → B. Russell e → A. Whitehead, nei *Principia Mathematica* (1910-1913), poterono erigere una logica completamente nuova, che superava quella tradizionale per generalità e rigore, e assumeva in più una valenza fondativa che veniva così sottratta, in qualche modo, alla → metafisica. La potenza del nuovo strumento era mostrata, nei fatti, con la costruzione logica della matematica, con l'effetto clamoroso di chiudere la crisi dei suoi fondamenti. Russell scriveva nell'introduzione ai *Principia*: «Abbiamo tuttavia evitato sia le controversie sia la filosofia generale e abbiamo espresso le nostre affermazioni in forma dogmatica (*dogmatic*). La giustificazione di tale modo di procedere è che la ragione principale in favore di qualunque teoria sui principi della matematica deve sempre essere induttiva, cioè si deve trovare nel fatto che la teoria in questione ci renda capaci di dedurre la matematica ordinaria» (Whitehead e Russell, 1910-1913, p. V). Ma, come noterà Hilbert (→ LOGICA III. 3), la logica non poteva pretendere di ricavare la propria affidabilità da quella medesima matematica alla cui fondazione doveva provvedere. Tanto più trattandosi di una matematica nella quale la nozione di insieme aveva aperto la possibilità di antinomie, mentre quella di numero sembrava implicare sempre l'→ "infinito", concetto tutt'altro che facile da delimitare, come mostravano i correttivi introdotti allo scopo, spesso peggiori dei mali che avrebbero dovuto sanare.

2. *La ricerca sull'affidabilità delle teorie logiche.* Per dare una soluzione radicale a questi dubbi, nacque in quegli anni un singolarissimo indirizzo di pensiero matematico, l'«intuizionismo», che aveva avuto il suo inizio da H. Poincaré, ma fu in gran parte opera dell'allora giovane matematico olandese Brouwer e della sua scuola (cfr. Brouwer, 1983, *Introduzione*). L'idea era di muoversi in direzione diametralmente opposta a Cantor, Frege, Peano e Russell: escludere dai fondamenti della matematica proprio la logica, facendola intervenire soltanto successivamente, tenendo conto che gli oggetti matematici sono creazioni della mente umana in continuo divenire, indipendenti però dal modo di conoscerli (Heyting, 1956, p. 1). Poiché entità sempre *in fieri* comportano la presenza dell'infinito "potenziale", si impongono alla logica restrizioni e peculiarità come, per es., il rigetto del "principio del terzo escluso". L'operazione epistemologica che ne risulta non è indolore, perché elimina dalla matematica interi capitoli, mentre altri vengono trasformati in modo totale: nasce così, accanto a quella "ufficiale", una matematica parallela di nazionalità prevalentemente olandese, interessantissima come fenomeno culturale e come stimolo critico, ma inaccettabile, di fatto, per la maggioranza dei matematici per le innumerevoli complicazioni che introduce. Nel panorama epistemologico di inizio secolo l'intuizionismo fu portatore di alcune esigenze simili a quelle che avanzerà negli anni '20 il Circolo di Vienna verso la scienza nel suo insieme; successivamente il distacco tra le due scuole, soprattutto ad opera di Carnap, sarà sempre più marcato ed infine il neopositivismo si sarebbe riconosciuto più affine all'indirizzo formalistico.

Il programma dell'indirizzo noto come «formalismo» restava fedele alla tradizione per la quale l'affidabilità di un "sistema formale" proviene dalla possibilità di trasformarne i passaggi dimostrativi in procedimenti meccanici di calcolo, che possono essere eseguiti passo passo. D'altra parte, sensibile, anche senza ammetterlo esplicitamente, alle critiche penetranti di provenienza intuizionista, il formalismo prendeva tanto seriamente il problema dell'affidabilità da compiere il difficile passo, di portata storica, di rinunciare alla *big logic*, scorporando dai *Principia Mathematica* linguaggi formali più semplici, di cui l'analisi delle procedure garantisse la sicurezza. Contemporaneamente, Hilbert ed i suoi principali collaboratori, W. Ackermann e P. Bernays, si accinsero all'impresa di fornire alla matematica una fondazione che la portasse fuori dalla crisi, accettando la suggestione, anch'essa di provenienza intuizionista, che i suoi oggetti fossero costruzioni di pensiero a partire da poche intuizioni originarie ma, respingendone i tratti "idealistici" che sembravano spostare la matematica ai margini della scienza, in una zona dai contorni incerti, limitarono l'intuizione ai segni e ad alcune loro configurazioni semplici (Hilbert, 1928, pp. 55-56). La matematica perdeva in creatività ma guadagnava in sicurezza.

In questo indirizzo le procedure venivano dalla teoria della cosiddetta "induzione matematica" (si veda qui la P 5) ed era ancora Peano a fornirle con gli assiomi dei numeri naturali (N). Essi sono (cfr. E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Torino 1972, p. 128): P_1 : 0 è un numero naturale; P_2 : se x è un numero naturale, esiste un altro numero naturale denominato x' chiamato il successore di x ; P_3 : 0 $\neq x'$ per ogni numero naturale (cioè «0 non è il successore di alcun numero naturale»); P_4 : se $x' = y'$, allora $x = y$ (cioè «se due numeri naturali hanno lo stesso successore, allora sono uguali»); P_5 : se Q è una proprietà che può oppure non può valere per tutti i numeri naturali, e se a) 0 ha la proprietà Q , e b) ogni volta che un numero naturale x ha la proprietà Q , allora x' ha la proprietà Q , allora tutti i numeri naturali hanno la proprietà Q (cioè «se 0 ha una certa proprietà e il fatto che un numero naturale qualunque abbia la stessa proprietà implica che il suo successore abbia la stessa proprietà, allora ogni numero naturale ha quella proprietà»).

Gli (N) sono il germe di una "teoria della recursione". Il "successore" ricava certi enti da altri, essendo assegnato il primo di essi: lo "0". Così con una reiterata applicazione del successore si ottiene qualsiasi ente che si comporti come un numero naturale. Se a quella di "successore" si aggiunge la nozione di "equazione", si ottengono in modo simile le operazioni aritmetiche elementari. Reiterando ancora la loro applicazione ad esse e ai loro risultati, si costruiscono funzioni sempre più complesse, che hanno però tutte la comune caratteristica di poter essere prodotte da quelle più semplici nel modo sopra indicato, secondo una gerarchia di complessità crescente. Funzioni siffatte saranno dette da Gödel «ricorsive» (cfr. *Opere*, 1931, p. 120; 1934, pp. 273-274).

3. *Completezza e decidibilità*. Gödel affronterà il tema nello scritto *Sulla completezza del calcolo della logica* (1929*, in *Opere*, pp. 63-82). Il problema dell'affidabilità della logica nei suoi vari livelli si spostava dunque dalle procedure, che sembravano ormai del tutto acquisite, agli assiomi ed ai loro legami con le altre proposizioni. Dopo il lavoro pionieristico di Post (\rightarrow LOGICA, IV), Gödel, nella sua tesi di dottorato scritta nel 1929, ma pubblicata nel 1930 con alcune varianti, affrontava il problema della completezza del calcolo funzionale ristretto (logica dei predicati del 1° ordine), isolato all'interno dei *Principia*. Nell'introduzione rimasta inedita, mantenendosi equidistante da Brouwer e da Hilbert (per questo forse Hahn suggerì di non pubblicarla), ma utilizzandoli entrambi, Gödel distingueva la «completezza», nozione di provenienza hilbertiana (egli dimostrava che la logica del 1° ordine la possiede), e la «decidibilità», di ascendenza brouweriana (cfr. *Opere*, pp. 63-65), che la medesima logica del 1° ordine non possiede (come dimostrerà pochi anni dopo Church). Per Brouwer non era sufficiente la coerenza degli assiomi di un sistema formale per assicurare l'esistenza di un "modello", come si era sempre creduto, e ora Gödel comincia ad avere seri dubbi, anche se espressi con cautela, che il formalismo possa sorreggere l'orgogliosa dichiarazione di Hilbert al "Congresso di Matematica" di Parigi del 1900 quando, nell'introdurre l'elenco dei 23 famosi problemi che da lui prendono il nome, affermò che «ogni problema matematico definito deve essere necessariamente suscettibile di una impostazione esatta, o nella forma di una reale risposta alla questione proposta, o in quella di una prova dell'impossibilità della sua soluzione» (Hilbert, 1976). Questo il contesto nel quale la nozione informale di "affidabilità", dallo sfondo in cui compariva ancora nell'introduzione ai *Principia Mathematica*, balza in primo piano, articolata in una serie di nozioni formalmente distinte.

III. Gli argomenti sviluppati da Gödel nelle *Proposizioni formalmente indecidibili dei "Principia Mathematica" e di sistemi affini*

Questa breve memoria (che avrà al termine del titolo l'indicazione « I » perché ne era prevista una seconda parte che non vide mai la luce) è forse lo scritto più famoso di tutta la logica matematica. Il suo stile ricorda la persona dell'autore, pacato, essenziale, con argomentazioni precise e concatenate, fin dalle prime righe: «Lo sviluppo della matematica nella direzione di un sempre maggiore rigore ha portato alla situazione, come è noto, che ampie parti di essa sono state formalizzate, in modo che le dimostrazioni possono essere svolte seguendo alcune poche regole meccaniche. I sistemi formali più ampi fino ad oggi proposti sono da un lato quello dei *Principia Mathematica* e dall'altro il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel per la teoria degli insiemi (successivamente sviluppato da J. von Neumann). Questi due sistemi sono così ampi che in essi risultano formalizzabili - cioè riducibili a pochi assiomi e regole di inferenza - tutti i metodi di dimostrazione oggi in uso nella matematica. Si potrebbe perciò pensare che questi assiomi e regole di inferenza siano sufficienti per decidere "tutte" le questioni matematiche che possono essere formalmente espresse in questi sistemi» (*Opere*, p. 113).

1. *Le aspettative e il metodo*. Se seguiamo l'indirizzo di Hilbert, formalizzando un settore della matematica con un sistema formale, intendiamo che esso comprenda tutto ciò che è necessario per dimostrare proposizioni che appartengono a quello specifico settore. Il che sembra corretto e

perfettamente plausibile. Whitehead e Russell lo davano per scontato, affidandone la conferma alla ricostruzione della matematica. Hilbert invece riteneva che fosse necessario fornire una dimostrazione, nella quale tradurre in forme rigorose la sicurezza psicologica fornita dalla "meccanicità" dei passaggi logici o matematici, sempre controllabili e riproducibili "passo passo", ma la cercava all'interno dei sistemi formali così costruiti, che si sarebbero "autofondati".

Gödel dimostrerà che ciò non è possibile in questi termini: «Sarà mostrato più oltre che non è questo il caso, che al contrario esistono nei due sistemi menzionati problemi relativamente semplici del sistema formale dei numeri naturali che non possono essere decisi sulla base degli assiomi» (*Opere*, p. 114). Ma egli va oltre, traducendo l'idea hilbertiana dell'autofondazione della matematica in un metodo effettivo di espressione della metamatematica (metateoria della matematica che racchiude le riflessioni *sulla* matematica, e le dimostrazioni della sua non contraddittorietà), *nella* matematica stessa, o meglio in quella parte generata dagli (N) il cui possesso viene richiesto ai sistemi formali sottoposti ad indagine: «Le formule di un sistema formale (ci limitiamo qui ai *Principia Mathematica*) sono, viste dall'esterno, successioni finite di segni primitivi (variabili, costanti logiche e parentesi o segni di interpunzione) ed è facile precisare esattamente "quali" successioni di segni primitivi siano formule sensate e quali non. In modo analogo le dimostrazioni, da un punto di vista formale non sono altro che successioni finite di formule [...] Per la trattazione metamatematica è naturalmente del tutto indifferente, quali oggetti si prendano come segni primitivi e noi scegliamo di usare a questo scopo i numeri naturali» (*ibidem*). Si assegna a ciascun segno e termine elementare di P (cioè il sistema dei *Principia Mathematica* con (N), ma questo vale anche per M , cioè il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel, e per l'aritmetica, A) un numero e soltanto quello, secondo una legge fissata, in modo che le formule del calcolo logico, formate da quei termini, divengano successioni finite di numeri interi ed una dimostrazione divenga una successione finita di successioni finite di numeri interi. Allora i termini e le formule che indicheranno numeri e loro proprietà saranno espressi a loro volta da numeri, che "parlano" di numeri e di loro proprietà. Questo procedimento di aritmetizzazione, che prenderà il nome di «gödelizzazione», consente di dimostrare che non è vero che il sistema è completo ($G1$: I° Teorema di incompletezza, cfr. pp. 127ss).

2. *La distinzione tra verità e dimostrazione per i linguaggi formali*. Il metodo messo a punto da Gödel produce però anche altri risultati, ancora più incisivi. Applicandolo a un sistema formale che, interpretato contenutisticamente, disponga di sufficienti mezzi di espressione per definire il concetto di "formula dimostrabile" e sia tale che ogni formula dimostrabile sia anche contenutisticamente corretta, Gödel riesce a costruire una formula che è indecidibile (cioè che è vera ma non è dimostrabile) entro il sistema. Essa ha la caratteristica di "parlare" di sé stessa e di dire di sé che non è dimostrabile (cfr. *ibidem*, p. 116). L'analogia di questa argomentazione con il "paradosso del mentitore" (→ LOGICA, I.3) è molto stretta, ma mentre il mentitore asserisce la verità della propria falsità, producendo un'antinomia, qui la proposizione indecidibile asserisce la verità della propria indimostrabilità e consente di ritrovare, anche per i linguaggi formali, la distinzione tra verità e dimostrazione (→ LOGICA, I.4). Scoprendo che non c'è ragione di identificare, come invece tendeva a fare il formalismo, i due livelli (verità-dimostrabilità), non c'è antinomia: su questo punto vi furono però i peggiori fraintendimenti. E non c'è autofondazione: Gödel vedeva qui aprirsi uno spiraglio per introdurre una "teoria della verità dei sistemi formali".

Sia perché era venuto a conoscenza dei lavori di Tarski in proposito, sia perché cominciava a vedere nel formalismo delle gravi limitazioni, Gödel si astenne accuratamente dall'occuparsene, sviluppando più tardi la sua riflessione sulla verità in termini filosofici. Comunque, la precisa analisi della singolare situazione che si era creata con la formula indecidibile condurrà a risultati sorprendenti, rispetto alla dimostrabilità della coerenza dei sistemi formali: non esiste una dimostrazione di coerenza né per P , né per M né per l'aritmetica A , che «possa essere formalizzata rispettivamente in P , M , A », purché essi siano coerenti. Quindi si ritrova che per ogni sistema formale non contraddittorio siffatto, esisteranno sempre in esso, proposizioni che risultano indecidibili ($G2$: II° Teorema di incompletezza, cfr. *Opere*, pp. 136ss). Si noti infine che questo risultato non dipende dal carattere "numerico" del metodo usato, come ha dimostrato «la scoperta da parte di Paris e Harrington nel 1977 di una proposizione indecidibile, matematicamente semplice e interessante, che non dipende da una codifica numerica di concetti logici» (Kleene 1999, p. 109).

3. *Gli effetti di $G1$ e $G2$* . La posizione sostenuta nei *Principia Mathematica* viene completamente rovesciata. Lungi dal ricevere conferma dalla matematica che riesce a ricostruire, un sistema formale coerente, "capace" di ricostruire anche soltanto l'"aritmetica elementare", per questo è incompleto e indecidibile. Gli effetti che ebbe un simile risultato sulla comunità scientifica e sui filosofi non furono immediati, né le interpretazioni univoche. Da alcuni, non fu compreso - per es.

da Zermelo, da Russell e dalla scuola di Peano - o fu sottovalutato - per es. da → Wittgenstein. Da altri fu percepito come una falla, da tappare, nella diga che la razionalità del formalismo erigeva contro la mentalità antiscientifica e l'irrazionalismo dilagante in Europa (come all'inizio fecero Hilbert e il Circolo di Vienna). Pochi, oltre Gödel (alcuni dei suoi uditori statunitensi, von Neumann e Tarski) si resero subito conto che le questioni epistemologiche sollevate erano profonde e andavano al di là dell'aspetto tecnico del problema. Esse coinvolgevano i rapporti tra verità e coerenza, rivelando che la struttura della scienza deduttiva era molto più complessa di quanto non si fosse sospettato e che, infine, lungi dal poter bandire la riflessione filosofica da ogni contatto con la scienza, questi risultati riaprivano problemi di confine che dimostravano così il loro spessore. Proprio il modo nel quale *G1* e *G2* erano stati ottenuti sottolineava l'importanza del rigore scientifico per la filosofia e di un controllo stretto sulla loro estensione ad altri ambiti. Comunque, in pochi anni il mondo dei logici accolse tutti i risultati conseguiti dalla ricerca sull'affidabilità dei sistemi formali, in un quadro d'insieme che, semplificato si presenta così:

<i>Tipi di sistemi formali</i>	<i>Completezza</i>	<i>Decidibilità</i>
Calcolo delle classi	sì (Post, 1921)	sì (Post, 1921)
Calcolo dei predicati 1° ord.	sì (Gödel, 1930)	no (Church, 1936)
<i>Principia Mathematica</i>		
Assiomi di Zermelo-Frenkel	no (Gödel, 1931)	no (Gödel, 1931)
Aritmetica		

IV. Aspetti filosofici

1. *Conseguenze filosofiche dei risultati di incompletezza e indecidibilità.* Al di là dell'aspetto strettamente tecnico, in quei risultati si vide pressoché tutto e il contrario di tutto: la liberazione dello spirito dalla minaccia della meccanizzazione o, viceversa, un fastidioso incidente nella marcia inarrestabile della razionalità. Prima di avventurarsi su queste strade non si deve dimenticare che *G1* e *G2* non sono dimostrazioni di incompletezza e indecidibilità assolute. Come ricorda lo stesso Gödel in una lettera, mai spedita, contenuta nel *Nachlass*, nella quale allude ad una vecchia polemica: «Tuttavia egli [P. Finsler] omette proprio il punto essenziale, cioè il fatto di restringersi ad un sistema formale ben definito, nel quale la proposizione risulti indecidibile. Egli infatti aveva l'obiettivo assurdo di dimostrare l'indecidibilità formale in senso assoluto [...]. Se Finsler si fosse posto all'interno di qualche sistema formale *S* ben definito, la sua dimostrazione avrebbe potuto essere corretta e applicata ad ogni sistema formale» dotato di determinate caratteristiche minimali (J.W. Dawson, *L'accoglienza dei teoremi di incompletezza di Gödel*, in Shanker, 1991, pp. 103-104) Gödel sviluppò successivamente queste idee sulla dimostrabilità e la definibilità in assoluto nelle *Osservazioni al Convegno sui problemi della matematica per il secondo centenario di Princeton* del 1946 (cfr. Cellucci, 1967, pp. 137-141).

In un sistema formale (→ LOGICA III), sia pur capace di esprimere il contenuto degli (*N*), non ci dovrebbe essere nulla più di quel che vi viene immesso esplicitamente, cioè segni e configurazioni di segni. La loro referenza è costruita artificialmente ed è molto diversa da quella delle lingue naturali: un segno si riferisce a tutti e soli quegli individui per i quali è stato definito, estensivamente. In questo modo si evita il ricorso al "pensiero" e ai concetti astratti, con il risultato di sottrarre la logica alle incertezze della/e filosofia/e, avviandola al sicuro porto della scienza. O almeno così si era creduto. Si possono ben comprendere, allora, le perplessità dinanzi a *G1* e *G2*. Gödel in anni successivi espresse l'opinione che una delle radici della difficoltà fosse l'→ infinito, che riaffiora, per es., quando per evitare un senso indeterminato di "universale" filosofico lo si sostituisca con un "quantificatore universale", del tipo: «per tutti gli *x*». Per evitare l'indeterminazione negli usi anche più elementari è necessario riferire "tutti" almeno all'infinito numerabile. Di qui si aprono gli interrogativi: a "quanti" *x* è allora effettivamente applicabile tale

quantificazione? E come ciò avviene? Viceversa, i criteri di una prova valida sono tutt'altro che univoci. Questo spiega il risultato trovato da Gerhard Gentzen nel 1936, primo di una lunga serie: egli ottenne una dimostrazione "finitaria" di coerenza della "teoria elementare dei numeri", ampliando la definizione di prova in modo tale che, invece di ammettere soltanto un numero finito di passaggi, ne ammettesse un numero n che può assumere valori fino ad un transfinito di un tipo ordinale "abbastanza alto ma non troppo" (→ CANTOR, III.2). Gentzen riuscì dove Gödel aveva fallito? Ma allora G_2 non ha che una validità del tutto relativa? Questo vale per tutte le prove di (in)decidibilità che, variando la definizione di prova, rovesciano addirittura i risultati ottenuti in precedenza. Gödel in una minuta di lezione senza titolo, preparata tra il 1938 ed il 1940, formula un'ipotesi di spiegazione che approfondirà nel decennio seguente: nella traduzione formalistica del concetto informale di prova come di «ciò che fornisce un'evidenza», va perduto un *quid* che resta irrecuperabile nel formalismo medesimo (cfr. sulle "Proposizioni diofantine indecidibili": *193?, in *CW* , III, pp. 164-175).

Se quel che è indecidibile può diventare decidibile, sotto nuove condizioni, non può più essere ignorato un sostrato che la formalizzazione ha creduto di rimuovere, che agisce, nonostante tutto, e al quale, nell'atto in cui si stabilisce l'affidabilità o meno delle procedure formalistiche, esse si rivelano debitorici. Questa inquietante scoperta ha dato occasione ad interpretazioni molto diverse. Dal punto di vista della filosofia della logica può significare la presenza di concetti astratti latenti nell'"uso" del formalismo, ma implicitamente operanti. Da un punto di vista più aderente alla pratica scientifica spiega come sia possibile che ragionamenti di tipo prevalentemente estensivo non funzionino come ci si attenderebbe: Feferman ha proposto di chiamare "intensionali" teoremi sintattici che mostrino queste caratteristiche (cfr. M.D. Resnik, *Il significato filosofico delle dimostrazioni di Gödel* , in Shanker , 1991, pp. 152ss; Dalla Chiara Scabia, 1968, pp. 112ss). Gödel notò che il più semplice diventa decidibile o completabile se arricchito, o se immerso nel più complesso e strutturalmente più ricco, che a sua volta però, considerato formalmente in se stesso, è indecidibile (cfr. *Terza delle Memorie dagli "Ergebnisse"* , 1932, in *Opere*, pp. 170-171). Perciò neppure in logica matematica si può procedere secondo una strategia rigorosamente riduttiva che non dominava soltanto il programma di Hilbert, ma tutta una mentalità scientifica che si era lasciata permeare dal positivismo, per il quale il comportamento di ciò che è più complesso viene completamente determinato dal comportamento del più semplice.

2. *Il platonismo*. La formalizzazione è dunque un procedimento utile ma riduttivo, i suoi prodotti non devono mai essere scambiati per l'oggetto iniziale e finale della ricerca, devono essere usati come mezzi efficaci di derivazione ma non possono sostituire le entità studiate. Questa convinzione dominerà tutta la successiva riflessione di Gödel, unita alla denuncia dei limiti del "nominalismo" e della povertà di quei concetti di carattere non universale, ma individuale, che devono essere continuamente estesi, ma non possono esserlo mai in modo sufficiente per coprire le necessità per le quali anche il formalismo stesso è stato escogitato. Tutte confluiscono nella professione di "platonismo" annunciata pubblicamente nell'articolo *La logica matematica di Russell* (1944), di cui viene trovato un primo esempio nel Russell dei *Principles of Mathematics* (1903). Però soltanto nella *Gibbs Lecture* (*Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, *1951, in *CW* III, pp. 304-323) Gödel ne fornisce un'esposizione completa: «La verità, ritengo, è che questi concetti formano una realtà obiettiva loro propria, che non possiamo creare o cambiare, ma soltanto percepire e descrivere» (p. 320). «Quindi io sostengo la prospettiva che la matematica descriva una realtà non sensibile, che esiste indipendentemente sia dagli atti sia dalle disposizioni della mente umana e che è soltanto percepita, e probabilmente percepita in modo molto incompleto, dalla mente umana» (p. 323).

In una ricostruzione storica rimasta inedita, Gödel mette alla prova il suo "platonismo" (*The modern development of the foundations in the light of philosophy* 1961/?, in *CW* III, pp. 374-387). Usando il grado di affinità con metafisica e religione, che ne sarebbero espressioni generiche, classifica i principali orientamenti nella fondazione della matematica secondo posizioni che egli chiama «di destra», come quelle ispirate allo spiritualismo, all'idealismo (ottimista) e ad alcune forme di teologia; e quelle «di sinistra», come lo scetticismo (pessimista), il materialismo, il positivismo; ed infine posizioni di compromesso o «miste», l'apriorismo (che inclina verso destra), o l'empirismo (verso sinistra) (cfr. W. James, *Pragmatismo* , 1907, tr. it. Milano 1994, p. 14). La storia del pensiero a partire dal Rinascimento si sarebbe mossa da destra verso sinistra e la matematica di per sé "platonica" non avrebbe fatto eccezione. Ne sono un esempio l'opera di J. Stuart Mill (1806-1873) e la scoperta delle antinomie, il cui peso è stato esagerato dagli scettici e dagli empiristi. La verità per Gödel richiede però una combinazione non meccanica delle posizioni di destra e di sinistra. Hilbert ne aveva avuto la sensazione, riconoscendo una specie di "realtà" ad oggetti matematici, ma, intendendo l'intuizione in modo troppo primitivo, l'aveva limitata a quella

sensibile dei segni e delle loro combinazioni, assecondando così la posizione di sinistra. I risultati di indecidibilità dimostrarono che è impossibile procedere ad una qualsiasi fondazione senza introdurre concetti astratti. Gödel anche su questo, come su altri punti, condivide la convinzione intuizionista della creatività della matematica ma non l'attribuisce all'inesauribilità del pensiero umano che costruisce gli oggetti matematici, ma al loro spessore ontologico. C'è un parallelo con la realtà sensibile, anche se bisogna spingersi oltre: in entrambi i casi la presenza della realtà è confermata da una ricchezza inesauribile, qui di nuove percezioni sensitive, là intellettuali.

La posizione di Gödel rivela però i suoi tratti più originali, distinguendosi dallo spiritualismo generico come dall'idealismo con il quale è stato spesso confuso (→ IDEALISMO, III.2), quando viene messa in connessione con le sue profonde riflessioni sui sistemi formali. Qui mostra di essere stato condotto a maturare le proprie convinzioni su problemi molto simili a quelli che portarono Platone all'affermazione di realtà in sé stesse. In entrambi è la seria considerazione sia del carattere universale dei termini del linguaggio, sia del modo con il quale si "riferiscono" alle cose (→ LOGICA I. 3): le dimostrazioni matematiche vengono condotte sulle figure materiali disegnate? O sulle parole che ne indicano le proprietà? O su "quello" che queste figure o parole indicano?

Per questo il platonismo gödeliano comporta l'attribuzione di uno statuto particolarissimo agli oggetti della matematica, che si manifesta attraverso i concetti astratti: «Quei concetti che sono essenzialmente del(la logica dei predicati del) secondo ordine o di ordine superiore, cioè che non contengono proprietà o relazioni di "oggetti concreti" (ad es. di combinazioni di segni), ma che si riferiscono a "strutture di pensiero" (*Denkgebilde*) (ad es., dimostrazioni, proposizioni sensate, ecc.), dove nelle dimostrazioni vengono impiegati tipi di intuizione (*Anschauung*) che non si ottengono dalle proprietà (spazio temporali) delle combinazioni di segni che li rappresentano, ma soltanto dal loro senso» (*Su un'estensione fino ad oggi non ancora utilizzata del punto di vista finitista*, 1959, in Cagnoni, 1981, p. 118). Ma come coglierli? Una delle obiezioni più diffuse si collega immediatamente con questa difficoltà che, anche a prescindere dal platonismo, colpisce direttamente il valore del pensiero astratto ed in generale dell'esperienza interiore, dando alla riflessione di Gödel un orizzonte molto più vasto ed un valore più profondo di quello che a volte le si riconosce: gli usuali strumenti a disposizione non possono funzionare allo scopo, non essendo possibile dare, nel formalismo, definizioni esplicite dei concetti razionali, come non è possibile fornire dimostrazioni per gli assiomi (entrambi rinvierebbero ad altri concetti e/o dimostrazioni all'infinito), perché non si tratta dei segni ma del loro "senso". Eppure i concetti matematici non si esauriscono nella psicologia dei soggetti: il "numero naturale" è presente a tutti, ma non dipende dalle opinioni personali di ciascuno.

3. *L'incontro con la fenomenologia.* A partire dalla seconda metà del XIX secolo, sul problema generale della natura del pensiero e dei suoi prodotti, la cultura contemporanea ha fornito in prevalenza risposte di tipo psicologistico (inutilizzabili per Gödel): riducibilità del pensiero a fenomeno della vita psichica, senza residui, completamente spiegato dalle sue leggi di associazione, ecc. Può essere il frutto di un'antica tradizione scettica, riscoperta dall'empirismo di →D. Hume (1711-1776), presente nel positivismo anglosassone di H. Spencer (1820-1903) e di J. Stuart Mill, usata validamente come anticorpo contro l'idealismo sulle cui rovine si affermò, come su quelle del neokantismo, facendosi poi forte dello sviluppo della psicologia sperimentale. Da qui, lo "psicologismo" trasformato in filosofia spicciola della vita psichica porta a non vedere in essa altro che "risposte a stimoli" o sintomi dello stato di benessere/malessere del soggetto. Se ne ha una buona dimostrazione nella fortuna del comportamentismo negli Stati Uniti del XX secolo. Allo psicologismo si rifanno Russell, Poincaré, Hilbert, Brouwer, o il Circolo di Vienna, con un'attitudine ambigua: da un lato ne subiscono il fascino semplificatore, contrario ad un idealismo antiscientifico allora in ripresa, dall'altro cercano di attenuarne la carica distruttiva, legata al solipsismo che ne deriva (si veda come testimone di tutto ciò Carnap, *La costruzione logica del mondo*, 1928): se la coscienza rappresenta un limite invalicabile, è possibile e ha senso cercare di uscirne? E se fuori della "mia" coscienza non ci fosse nulla? (cfr. Binotti, 1994). Lo psicologismo restava dunque, e resta, variamente declinato, la posizione di metafisica della conoscenza dominante nella mentalità scientifica e filosofica (cfr. M. Dummett, *Origini della filosofia analitica*, Torino 2001).

Non desta dunque meraviglia che nella sua ricerca sempre più attenta su questi problemi, Gödel abbia incontrato, probabilmente intorno al 1959, l'opera di Edmund Husserl (1859-1938), il più implacabile critico contemporaneo dello psicologismo, da lui indicato, fino alle sue ultime opere, come il pericolo più grave per la scienza e per la cultura europea (cfr. *La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*, 1937). Inoltre, ad avvicinare i due pensatori vi erano notevoli punti di contatto. Anche Husserl si era formato inizialmente come matematico, alla scuola del grande Karl T. Weierstrass (1815-1897), del quale era stato per qualche tempo assistente a Berlino.

Poi aveva conosciuto personalmente Cantor, Zermelo e Hilbert, e quest'ultimo lo aveva aiutato ad entrare nell'Università di Gottinga. Aveva influito sul pensiero di intuizionisti come H. Weyl (1885-1955) e A. Heyting (1898-1980), e di alcuni logici della scuola polacca maestri di Tarski (cfr. Tieszen, 1998, pp. 181-182). Infine, dopo essersi occupato di problemi di fondazione della matematica (cfr. *Filosofia dell'aritmetica. Ricerche psicologiche e logiche*, 1891), i suoi interessi si erano spostati decisamente verso la filosofia, e aveva restaurato una sorta di platonismo, sia pure per integrarlo in una più ampia prospettiva. Insomma aveva compiuto mezzo secolo prima, con molta autorevolezza, un percorso affine a quello di Gödel.

Husserl aveva teorizzato la ricerca di senso non come problema linguistico o psicologico, ma concettuale, e l'aveva focalizzata intorno all'intuizione (*Anschauung*), termine usato per indicare il darsi immediato delle cose non soltanto nell'esperienza, come faceva Hilbert, ma anche nella riflessione, sotto forma di "essenze" o "idee" (cfr. *La filosofia come scienza rigorosa*, 1911). Per questa ragione la fenomenologia poteva evitare sia il salto mortale dell'idealismo al di là della metafisica, sia il rigetto positivisticò di ogni metafisica. Negli scritti del *Nachlass* di Gödel si può constatare il frutto di queste riflessioni con l'uso più frequente del termine «intuizione» (cfr. Parsons, 1995). Ma nella VI delle *Ricerche Logiche* (1913-1922) di Husserl, dedicata all'«Intuizione categoriale», Gödel trova quello che stava cercando: l'esposizione rigorosa di quel che conduce al senso dei contenuti concettuali che sfuggono altrimenti al processo definitorio formalistico. È la "chiarificazione di senso", della cui peculiarità si rende perfettamente conto: «Qui chiarificazione di senso consiste nel concentrarsi più intensamente sui concetti in questione dirigendo la nostra attenzione in un certo modo, in particolare sui nostri propri atti, nell'atto in cui usiamo quei concetti, sui nostri poteri di emettere quegli atti, ecc. Così facendo si deve tenere chiaramente presente che la fenomenologia non è una scienza nel medesimo senso delle altre. Invece è una procedura o una tecnica che produrrà in noi un nuovo stato di coscienza nel quale descrivere in dettaglio i concetti base che noi usiamo nel nostro pensiero o coglierne altri, fino ad ora sconosciuti» (1961/?, in *CW III*, p. 383). Anche quando, alla fine della sua vita, Husserl gli apparirà ormai soltanto come una tappa della sua lunga riflessione, egli non mancherà di raccomandarne ai logici più giovani la lettura.

V. Il tempo e le sue aporie

Nel brevissimo saggio *Teoria della relatività e filosofia idealistica* del 1949 (in Schilpp, 1958, pp. 503-510), Gödel aveva definito come idealistica la tesi che il mutamento e quindi il → tempo non sono oggettivi, attribuendola a Parmenide, Berkeley e Kant. Al di là di una ricostruzione storiografica discutibile, questo scritto mostra che collegare il tempo con la realtà del cambiamento impone di affrontare una serie di antinomie, qui ricavate dalla lettura della *Critica della Ragione Pura*, che investono l'«idea di uno scorrere oggettivo del tempo», la sua esistenza, ricondotta a quella di «un'infinità di istanti di "adesso" che vengono successivamente in esistenza», ed infine il ruolo dell'osservatore, che non ha diritto ad alcun privilegio rispetto a qualsiasi altro (cfr. *ibidem*, pp. 504-505). Così Gödel ridà voce ad un metodo antico, quello aporetico, e a problemi altrimenti banalizzati come esercizi scolastici sia dagli aristotelici, sia dagli scienziati dopo Newton.

La trattazione sul tempo del IV libro della *Fisica* di Aristotele, libro ed autore non molto amati da Gödel, si concludeva proprio con una serie di aporie che sono la remota origine della trattazione kantiana (cfr. Binotti, 1999, pp. 60ss). Cominciano con l'esistenza o meno del tempo in assenza dell'anima e si chiudono con l'alternativa tra molteplicità o unicità del tempo. Vengono in genere date per risolte (Averroè) grazie alla dimostrazione che il moto del (Primo) Cielo è la misura globale del tempo. Così facendo, la tradizione post-aristotelica si concentra sulla nozione di misura, mentre Aristotele aveva definito primariamente il tempo come "numero del movimento" (cfr. Binotti, 1999, pp. 94ss). Newton, che ha riaperto da par suo il problema, ne conosceva sia la versione di scuola aristotelica sia quella cartesiana, ha creduto di poterlo chiarire con la distinzione tra tempo volgarmente inteso, misurato, e tempo assoluto che lo fonda. La fisica successiva ha ignorato la distinzione considerando il tempo-misura come tempo assoluto. Quando Einstein metterà in crisi questa identificazione riattiverà anche le antiche aporie sia pure in un linguaggio diverso, quello di sistemi di riferimento in moto e di tempi locali (→ RELATIVITÀ, TEORIA DELLA). Ancora una volta però prevalsero soluzioni armonizzanti per ritrovare, alla fine, un tempo unico (cfr. Gödel, *Teoria della relatività e filosofia idealistica*, cit., 1958, p. 506). Contro di esse si muove Gödel, annunciando la scoperta di alcune soluzioni delle equazioni della teoria della relatività generale, che corrispondono a mondi, all'interno dei quali non può esistere un tempo globale unico: «Esistono soluzioni cosmologiche di tipo diverso da quelle che oggi conosciamo [...] perché i tempi locali [...] non si possono armonizzare in un unico tempo universale. Né per essi esiste alcun procedimento per

raggiungere lo scopo; questi mondi cioè possiedono tali qualità di simmetria che, per ciascun possibile concetto di simultaneità e di successione, ne esistono altri che non si possono distinguere da esso in nessuna proprietà intrinseca, ma solo in riferimento a singoli oggetti, quale ad esempio, un particolare sistema galattico» (*ibidem* , p. 507).

Anche se si tratta di mondi soltanto "possibili" queste soluzioni sono , a nostro parere, di grande importanza. La possibilità che il tempo assoluto non esista si collega alla condizione che le esperienze successive di un osservatore in un universo in espansione, come sembra essere il nostro, non siano mai simultanee nel tempo assoluto. Anche la questione dell'oggettività o non oggettività del tempo, che all'epoca sembrava cadere fuori della fisica, è di estremo interesse. L'esistenza di soluzioni delle equazioni di Einstein, con diversi valori della costante cosmologica, rappresentano il diverso modo nel quale sono disposti materia e moto in un determinato universo e in questo modo il problema della natura del tempo viene a ricevere un'impostazione più ampia (cfr. *ibidem* , p. 509). In questo modo assolutamente originale, anche se in forma storiograficamente non avvertita, Gödel ritrova in un certo senso, ragionando in modo indipendente su poche righe di Kant, l'impianto problematico che Aristotele ha immesso in tutta la tradizione posteriore, che non ha saputo sempre valorizzarlo.

VI. La prova ontologica dell'esistenza di Dio

Si possono trovare, sparse nel *Nachlass*, varie e molteplici tracce riconducibili alla religione ed alla teologia. Gödel si descriveva come un teista piuttosto che un panteista (→ PANTEISMO) e per chiarire meglio la sua posizione precisava di essere: «un seguace di Leibniz piuttosto che di Spinoza» (cfr. Dawson, in Shanker, 1991, p. 7). E verso l'ultima fase della sua vita si occupò dell'argomento ontologico per la dimostrazione dell'esistenza di → Dio. Un tema che si trovava all'intersezione complessa di religiosità, platonismo e di uno studio approfondito di Leibniz, un autore sul quale si può dire che Gödel abbia meditato per tutta la vita.

1. *La riflessione di Leibniz.* Leibniz non procede direttamente dall'argomento ontologico "classico" di Anselmo d'Aosta (*Monologium, Proslogion*), ma dalla formulazione cartesiana (→ DESCARTES, V) , anche se tiene conto del parere negativo di → Tommaso d'Aquino nei confronti di Anselmo: «Questo argomento rinnovato da Cartesio, era stato proposto da uno degli antichi scolastici [...] ma Tommaso, tra gli altri, rispose che esso presupponeva che Dio fosse; cioè secondo che io interpreto, che abbia un'essenza, almeno come l'ha la rosa in inverno, ovvero che tale concetto sia possibile. È questo il privilegio dell'essere perfettissimo: che posto che sia possibile, senz'altro esiste. Cioè dalla sua essenza, o concetto possibile, segue l'esistenza. Ma se tale dimostrazione ha da essere rigorosa si deve dimostrare tale possibilità» (Leibniz, *De synthesi et analisi universalibus, seu de arte inveniendi et judicandi*, tr. it. Bari 1963, p. 61). Questo sarà il punto di riferimento di tutta la sua riflessione in materia, come di quella di Gödel che lo seguirà in questo molto da vicino. Per dimostrarlo, in una conversazione con Spinoza, Leibniz aveva definito perfezione «ogni qualità semplice, che sia positiva e assoluta: tale cioè che ciò che esprime, lo esprima senza limiti». Di qui credette di poter concludere «che tutte le perfezioni sono compatibili tra loro, ossia che possono trovarsi nello stesso soggetto» (Leibniz, *Quod ens perfectissimum existit* , *ibidem* , p. 90). Ciò gli sembra sufficiente per dimostrare la possibilità, e di qui l'esistenza, di Dio. Ogni volta che tornerà sul problema (come nei *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, IV, 10) ribadirà questa posizione.

2. *L'intervento di Gödel.* Su questa "dimostrazione di possibilità" si appunta l'attenzione di Gödel, con una variante degna di nota: la nozione di perfezione, sovraccarica di riferimenti, viene accantonata e sostituita con quella più debole di "positività", più indeterminata ma più maneggevole dal punto di vista logico (*1970, in CW III, pp. 403ss). Senza entrare in dettagli troppo tecnici diremo che per formalizzarne l'uso si introduce, anzitutto, un "operatore di positività". Come la funzione di verità assegna valori di verità (→ LOGICA, III. 2) all'applicazione di un predicato o proprietà ad individui, così l'operatore di positività, che si applica alle proprietà, assegna loro un valore di verità se queste possiedono la caratteristica di essere positive. Una proprietà si può dire "positiva" in tanti sensi (moralì, estetici, etc.) ma qui interessa soprattutto il senso di "attribuzione pura" e la sua negazione viene interpretata come "privazione", assenza di certi elementi dell'essere.

Ad esempio, se consideriamo la proprietà di "essere presente in un certo luogo in un determinato tempo", questa è una proprietà positiva. Però non vuol dire che essere da qualche altra parte nel medesimo istante non sia anche una forma di attribuzione pura. Se però essere presenti in un luogo significa essere assenti da un altro, allora l'attribuzione di un aspetto dell'essere non si potrebbe dire puro («senza limiti», secondo Leibniz); mentre si direbbe che Dio è presente in un luogo in un senso di attribuzione pura perché questo non richiede che sia assente da altri. A questo punto, non

tutte le proprietà di Dio sono necessariamente "positive" nel senso predetto. Il secondo passaggio formalizza queste caratteristiche divine: si dice che un individuo ha la "proprietà-di-essere-Dio" se possiede "ogni" proprietà positiva. Gödel aggiunge, poi, definizioni per l'essenza di un individuo, che comprende tutte le sue possibili proprietà, compresa l'esistenza necessaria, come proprietà che deriva dall'essenza.

Ricostruita in questo modo, e con l'aiuto della formalizzazione simbolica, nell'argomentazione di Leibniz emerge una lacuna. Infatti, la positività delle proprietà, e a maggior ragione la loro "perfezione", non è preservata in generale dalla loro aggregazione, ma soltanto dalla loro aggregazione "finita" e non per infinite proprietà positive. Se ci si restringesse a ciò, tra le varie conseguenze, si avrebbe che l'argomento potrebbe dimostrare soltanto l'esistenza di un "dio" non trascendente, ma parte di un mondo siffatto. Nell'aggregazione di un'infinità di proprietà, invece, la positività perde di significato e quindi non si conserva. Perciò la dimostrazione della possibilità che tutte le perfezioni possano coesistere in un individuo in generale, quindi anche nel caso di un loro numero infinito - anello indispensabile nella dimostrazione leibniziana dell'argomento ontologico - viene a mancare.

Per farcene un'idea intuitiva potremmo considerare un esempio a partire dall'insieme dei numeri interi, definendo «l'aver "positività"» con «essere uguale o maggiore di un dato numero», fissato una volta per tutte: supponiamo che sia il 3. Alcuni numeri (quelli minori di 3) non avranno "positività" in questo senso; mentre se un numero è maggiore di 3, per es. 7, avrà "positività". Ora qualsiasi altro numero maggiore di 7, per es. 100, sarà anche maggiore di 3, e così via. Quindi l'"aggregazione" due a due di numeri aventi "positività", la conserva, come sopra. Ma se consideriamo "tutti" i numeri maggiori o uguali a 3, non ce ne è uno maggiore di tutti, perché non esiste un numero naturale più grande di tutti gli altri. Questo è soltanto un esempio, ma si può trasformarlo in un modello rigoroso.

Ecco, allora, il terzo passaggio: quello di definire «essere-Dio» come una "proprietà positiva". Quindi «tutte le proprietà di Dio sono positive»: questo, tramite la definizione di essenza e tramite l'esistenza necessaria derivante dall'essenza, assicura la possibilità che Leibniz riteneva di aver stabilito e le dà una consistenza, senza eccezioni, propria della attribuzione pura: «l'esistenza di un individuo che abbia la proprietà di essere-Dio». Qui Gödel mette in luce una difficoltà che non sembra essere stata rilevata prima. Se l'argomento prova che c'è almeno un individuo che abbia la "proprietà di essere-Dio", nulla impone che ce ne sia al massimo uno: una difficoltà logica che non ha niente a che fare con il politeismo. Per superarla, nell'apparato tecnico della teoria degli insiemi, bisognerebbe usare il controverso «assioma di scelta», sul quale Gödel ha molto riflettuto: esso assicurerebbe in un insieme infinito, parzialmente ordinato, quale appare il mondo delle proprietà tradotto nel gergo algebrico, l'esistenza di un elemento "più grande di tutti gli altri".

Tutto questo non rappresenta che un lungo periplo intorno al « *Credimus [.] aliquid quo nihil maius cogitari possit* (crediamo [.] in qualcosa di cui non si può pensare nulla di più grande)» (Anselmo, *Proslogion*, cap. II), che finisce per tornare alle perplessità espresse, al tempo di Anselmo, già del suo critico Gaunilone, ma non è un lavoro inutile. Gödel ha avuto sicuramente il merito di delineare la struttura logica dell'argomento e di individuarne alcune difficoltà, stimolando una ripresa del suo studio (cfr. R. Adams, in *CW III*, pp. 388-402). Il rinnovato interesse ha anche altre giustificazioni. Infatti, se l'argomento potesse essere reso valido, o almeno convincente, potrebbe fornire alla teologia naturale un'alternativa alle prove di tipo cosmologico che sono parse spesso più difficili da ricavare dalla struttura della scienza moderna; meno forse da quella contemporanea che sembra poter accedere a paradigmi meno restrittivi e maggiormente attenti anche al principio di causalità, che insieme all'→ analogia era una delle chiavi di volta di quelle dimostrazioni (cfr. Binotti, 2001). D'altra parte l'esposizione di Gödel e gli studi cui la sua pubblicazione postuma ha dato occasione, sottolineano le numerose condizioni da introdurre, forse troppe per un argomento *a priori*, che dovrebbe invece preferirsi proprio per la sua semplicità e immediatezza! Il cammino appare quindi ancora lontano dall'essere concluso in modo soddisfacente (cfr. Oppy, 1996).

Giovanni Binotti

Vedi: DIO; IDEALISMO; LOGICA; MATEMATICA, VALORE SAPIENZIALE DELLA; METAFISICA; POSITIVISMO; CANTOR, G.; RUSSELL, B.; WITTGENSTEIN, L.

Bibliografia

Opere di K.F. Gödel: *Collected Works* [= CW], a cura di S. Feferman, 3 voll., Oxford Univ. Press, Oxford-New York; vol. I (1986): *Publications 1929-1936*; vol. II (1990): *Publications 1938-1974*; vol. III (1995): *Unpublished essays and lectures*. (L'edizione con testo originale e traduzione inglese a fronte comprende anche le minute di saggi, lezioni e note contenute nel *Nachlass*, il fondo dei manoscritti che la signora Gödel ha lasciato all' *Institute for Advanced Studies*. I testi inediti vengono indicati con «*anno», gli altri con «anno/?»). In lingua italiana è uscita la traduzione del vol. I: K. GÖDEL, *Opere, vol. I, 1929-1936*, Boringhieri, Torino 1999. Inoltre, sempre in tr. it.: *Proposizioni formalmente indecidibili dei "Principia Mathematica" e di sistemi affini* (1931), in *Il teorema di Gödel. Una messa a fuoco*, a cura S.G. Shanker, Muzzio, Padova 1991, pp. 21-62; *La logica matematica di Russell* (1944), in C. Cellucci, *La filosofia della matematica*, Laterza, Bari 1967, pp. 81-112; *Osservazioni al Convegno sui problemi della matematica per il secondo centenario di Princeton* (1946), *ibidem*, pp. 137-141; *Che cos'è il problema del continuo di Cantor* (1947, n.v. 1964), *ibidem*, pp. 113-136; *Teoria della relatività e filosofia idealistica* (1949), in P.A. Schilpp (a cura di), *Albert Einstein scienziato e filosofo*, Boringhieri, Torino 1958, pp. 503-510; *Su un'estensione fino ad oggi non ancora utilizzata del punto di vista finitista* (1959), in *Teoria della dimostrazione*, a cura di D. Cagnoni, Feltrinelli, Milano 1981, pp. 117-123.

Altre opere: A. HEYTING, *Intuitionism. An Introduction*, North-Holland, Amsterdam 1956; P.A. SCHILPP (a cura di), *Albert Einstein scienziato e filosofo*, Boringhieri, Torino 1958; E. AGAZZI, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano 1961; E. NAGEL, J.R. NEWMAN, *La prova di Gödel*, Boringhieri, Torino 1961; A.N. WHITEHEAD, B. RUSSELL, *Principia Mathematica* (1910-1913), Cambridge Univ. Press, Cambridge 1962; G.W. LEIBNIZ, *Saggi filosofici e lettere*, a cura di V. Mathieu, Laterza, Bari 1963; R. CARNAP, *La costruzione logica del mondo* (1928), Fabbri, Milano 1966; A. HEYTING, *Disputa*, in C. Cellucci, "La filosofia della matematica", Laterza, Bari 1967, pp. 233-246 (tr. parziale di Heyting, 1956); M.L. DALLA CHIARA SCABIA, *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, Feltrinelli, Milano 1968; P.J. COHEN, *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo* (1966), Feltrinelli, Milano 1973; D. HILBERT, *Mathematical Problems. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, "Bulletin of the American Mathematical Society" 8 (1902), pp. 437-479 (rist. in *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*, "Proceedings of Symposia in Pure Mathematics", a cura di F.E. Browder, vol. 28, American Mathematical Society, Providence 1976); D. HILBERT, *I fondamenti della matematica* (1928), in *Teoria della dimostrazione*, a cura di D. Cagnoni, Feltrinelli, Milano 1981, pp. 55-76; H. WANG, *Dalla matematica alla filosofia* (1974), Boringhieri, Torino 1981; L. BROUWER, *Lezioni sull'intuizionismo*, a cura di D. Van Dalen, Boringhieri, Torino 1983; R. GÖDEL, O. TAUSKI-TODD, S.C. KLEENE, G. KREISEL, *Gödel Remembered*, Bibliopolis, Napoli 1987; E. REGIS, *Chi si è seduto sulla sedia di Einstein?*, Frassinelli, Milano 1990; S.G. SHANKER (a cura di), *Il teorema di Gödel. Una messa a fuoco*, Muzzio, Padova 1991; G. LOLLI, *Indecidibilità. Saggio su Kurt Gödel*, Il Mulino, Bologna 1992; R. ADAMS, *Introductory Note to *1970*, in CW III, 1995, pp. 388-402; G. BINOTTI, *Il problema della coscienza e della sua struttura*, "Annali Chieresi", Chieri 1994, pp. 69-96; C. PARSONS, *Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought*, "The Bulletin of Symbolic Logic" 1 (1995), n. 1, pp. 44-74; G. OPPY, *Godelian Ontological Arguments*, "Analysis" 56 (1996), n. 4, pp. 226-230; R. TIESZEN, *Gödel path from the incompleteness theorems (1931) to phenomenology (1961)*, "The Bulletin of Symbolic Logic" 4 (1998), n. 2, pp. 181-203; G. BINOTTI, *Il tempo: una struttura concettuale*, in "Tempo della legge e tempo della storia", a cura di G.M. Chiodi, Guida, Napoli 1999, pp. 45-108; S. FEFERMAN, *La vita e le opere di Gödel*, in *Opere, vol. I, 1929-1936*, Torino 1999, pp. 3-37; S.C. KLEENE, *Nota introduttiva a Gödel, 1931*, in *ibidem*, pp. 95-110; G. BINOTTI, *Tentar l'essenza?*, "I Martedì" 25 (2001), n. 1, pp. 10-15.